Système du second ordre

Forme canonique

$$\boxed{H(jw) = \frac{l}{(jw)^2 + 2m(jw)w_0 + w_0{}^2}}$$

Soit $H_0 = \frac{l}{w_0{}^2} \Rightarrow$ c'est le « Gain statique » on peut écrire $H(jw) = \frac{H_0}{(j\frac{w}{w_0})^2 + 2mj\frac{w}{w_0} + 1}$

1 - Etude de la résonnance :

on pose $\underline{\frac{w}{w_0} = u}$ $\quad \Rightarrow H(u) = \frac{H_0}{(ju)^2 + 2mju + 1}$

$$\Rightarrow |H(u)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}}$$

La dérivée du module s'annule pour :

$2(1-u^2)\times(-2u) + 4m^2 \times 2u = 0$ donc pour $8m^2 = 4(1-u^2)$

ou encore

$\Rightarrow u^2 = 1 - 2m^2 \Rightarrow u_r = \sqrt{1-2m^2}$ Ceci n'est possible que pour : $\boxed{m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}$

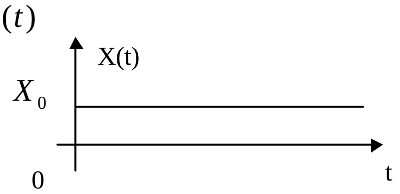
donc :

$$\boxed{\frac{w_r}{w_0} = \sqrt{1-2m^2} \Rightarrow w_r = w_0\sqrt{1-2m^2}}$$

Pulsation de résonance Pulsation propre

2 - Etude de la réponse à un échelon :

En entrée : $x(t)$



$X(p) = \frac{X_0}{p}$

$$\boxed{H(p) = \frac{l}{p^2 + 2mw_0 p + w_0{}^2}}$$

La sortie y(t) sera donnée par y(t)= $L^{-1}\left[H(p).X(p)\right]$

2-1 Préliminaires :

Détermination des racines (pôles) du dénominateur :

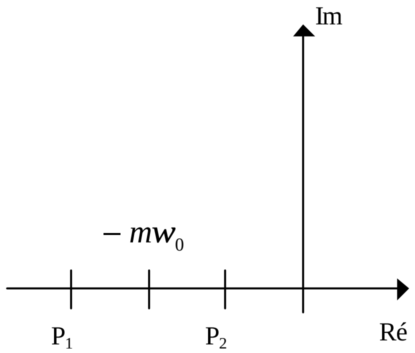
$$\Delta = 4m^2 w_0{}^2 - 4w_0{}^2 \Rightarrow \Delta = 4w_0{}^2(m^2 - 1)$$

2 racines réelles pour $\Delta > 0$ c'est à dire m>1
1 racine double réelle pour $\Delta = 0$ c'est à dire m=1
2 racines complexes conjuguées pour $\Delta < 0$, c'est à dire 0<m<1

2-2 cas m>1 Þ 2 racines réelles :

$$P_1 = \frac{-2mw_0 - 2w_0\sqrt{m^2-1}}{2} = -mw_0 - w_0\sqrt{m^2-1}$$

$$P_2 = \frac{-2mw_0 + 2w_0\sqrt{m^2-1}}{2} = -mw_0 + w_0\sqrt{m^2-1}$$



et H (p) peut se mettre sous la forme :

$$\text{H(p)} = \frac{l}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

On remarquera que $P_1 P_2 = w_0{}^2$

donc :

$$Y(p) = H(p).X(p) = \frac{l}{(p-p_1)(p-p_2)} \times \frac{X_0}{p}$$

Donc Y(p) = $\dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p-p_1} + \dfrac{g}{p-p_2}$

$$\Rightarrow l.X_0 = a.(p-p_1)(p-p_2) + b.p(p-p_2) + g.p(p-p_1)$$

Si p=0 : $l.X_0 = a.p_1 p_2 \Rightarrow a = \dfrac{l.X_0}{p_1 p_2}$

Si p=p₁ : $l.X_0 = b.p_1(p_1 - p_2) \Rightarrow b = \dfrac{l.X_0}{p_1(p_1 - p_2)}$

Si p=p₂ : $l.X_0 = g.p_2(p_2 - p_1) \Rightarrow g = \dfrac{l.X_0}{p_2(p_2 - p_1)}$

Réponse temporelle :

$$y(t) = a.u(t) + b.e^{p_1 t}u(t) + g.e^{p_2 t}u(t)$$

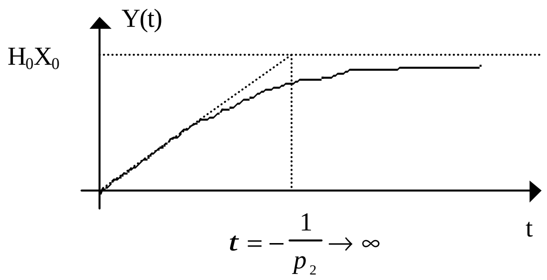
$$y(t) = \frac{l.X_0}{p_1 p_2}u(t) + \frac{l.X_0}{p_1(p_1 - p_2)}e^{p_1 t}u(t) + \frac{l.X_0}{p_2(p_2 - p_1)}e^{p_2 t}u(t)$$

$$\boxed{y(t) = H_0 X_0\left[1 + \frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}\right]u(t)}$$

Remarque : Si m>>1 :

$$p_1 \approx -2mw_0 \qquad p_2 \approx 0$$

donc $\dfrac{p_2}{p_1 - p_2} \approx 0$ et $\dfrac{p_1}{p_1 - p_2} \approx 1$ donc $y(t) \approx H_0 X_0 (1 - e^{p_2 t}) u(t)$



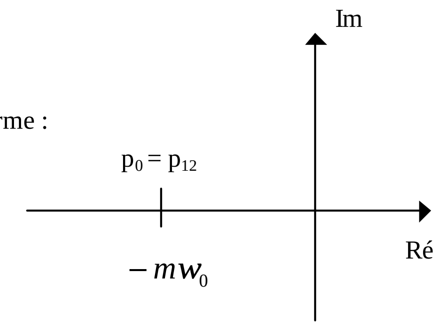
C'est une réponse indicielle avec une très grande constante de temps.

2-3 cas m=1 Þ des racines doubles réelles :

$\Delta = 0$ donc $p_{12} = p_0 = -\dfrac{2mw_0}{2}$ $\boxed{p_0 = -w_0}$ car m=1

et H (p) peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{l}{(p + w_0)^2}$$



$$Y(p) = H(p).X(p) = \frac{l.X_0}{p(p+w_0)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{(p+w_0)^2} + \frac{g}{p+w_0}$$

$$\Rightarrow l.X_0 = a(p+w_0)^2 + b.p + g.p(p+w_0)$$

Si p = 0 : $l.X_0 = a.w_0{}^2 \Rightarrow a = \dfrac{l.X_0}{w_0{}^2}$

Si p = $-w_0$: $l.X_0 = -b.w_0 \Rightarrow b = \dfrac{-l.X_0}{w_0}$

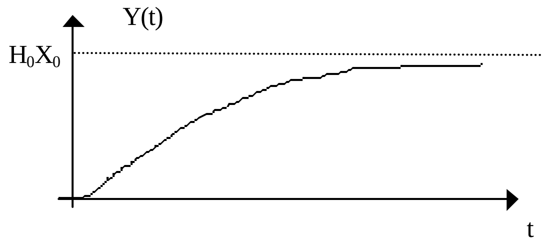
Si p = w_0 : $l.X_0 = a(2w_0)^2 + b.w_0 + g\,2w_0{}^2$ $\qquad g = \dfrac{-l.X_0}{w_0{}^2}$

Réponse temporelle :

$$y(t) = a.u(t) + b.t.e^{-w_0 t}u(t) + g.e^{-w_0 t}u(t)$$

$$y(t) = H_0 X_0 \left[1 - e^{-w_0 t} - w_0 t.e^{-w_0 t}\right] u(t)$$

$$y(t) = H_0 X_0 \left[1 - (1 + w_0 t)e^{-w_0 t}\right] u(t)$$



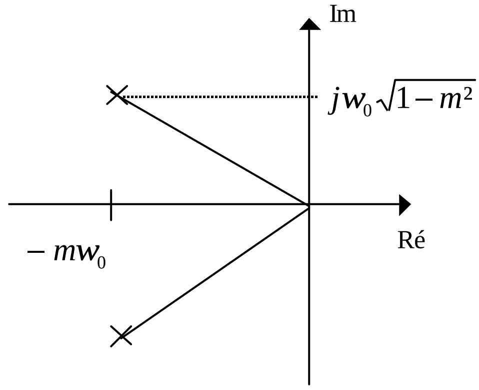
2-4 cas 0<m<1 Þ 2 racines complexes conjuguées :

$$H(p) = \frac{l}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2}$$

$p_1 = -s - jw'_c$ et $p_2 = -s + jw'_c$ à identifier.

et H (p) peut se mettre sous la forme :

$$\text{H(p)} = \frac{l}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad \text{et toujours } H_0 = \frac{l}{w_0^2}$$



$$P_1 = \frac{-2mw_0 + j\sqrt{-4w_0^2(m^2-1)}}{2} = -mw_0 + jw_0\sqrt{1-m^2}$$

$$P_2 = \frac{-2mw_0 - j\sqrt{-4w_0^2(m^2-1)}}{2} = -mw_0 - jw_0\sqrt{1-m^2}$$

donc :

$$\boxed{s = mw_0 \quad \text{et} \quad w'_c = w_0\sqrt{1-m^2}}$$

Le calcul du paragraphe 2-2 reste valable pour la décomposition en éléments simples :

Donc Y(p) = $\frac{a}{p} + \frac{b}{p - p_1} + \frac{g}{p - p_2}$ avec $a = \frac{lX_0}{p_1 p_2}$; $b = \frac{lX_0}{p_1^2 - p_1 p_2}$; $g = \frac{lX_0}{p_2^2 - p_1 p_2}$

On remarque que :

$$p_1 p_2 = s^2 + w_c'^2$$

$$p_1^2 - p_1 p_2 = -2(w_c'^2 - jsw'_c)$$

$$p_2^2 - p_1 p_2 = -2(w_c'^2 + jsw'_c)$$

donc que $b = g^*$

d'où $a = H_0 X_0$; $g = \frac{lX_0}{p_2(p_2 - p_1)}$; $b = \frac{lX_0}{p_2^*(p_2^* - p_1^*)}$

(Pour rendre plus simple la forme temporelle)

Les calculs préparatoires à la forme temporelle donnent :

$$\frac{g}{H_0 X_0} = -\frac{1}{2}(1 - j\frac{m}{\sqrt{1-m^2}})$$

Pour avoir une facilité à revenir à la forme temporelle, on met $\frac{g}{H_0 X_0}$ sous la forme re^{jq}

avec $\frac{g}{H_0 X_0} = -\frac{1}{2} + j\frac{m}{2\sqrt{1-m^2}}$ on a : $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(1-m^2)}}$ et $q = arctg(\frac{-m}{\sqrt{1-m^2}})$

donc $tgq = \frac{-m}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{-s}{w'_c}$ et $\cos q = -\sqrt{1-m^2)} = \frac{-w'_c}{w_0}$

Réponse temporelle :

$$y(t) = (a + be^{p_1 t} + ge^{p_2 t})u(t)$$

$$y(t) = (a + g^* e^{p_2 t^*} + ge^{p_2 t})u(t)$$

$$y(t) = \left[a + 2\,\mathrm{Re}(ge^{p_2 t})\right]u(t)$$

$$y(t) = H_0 X_0 + 2\,\mathrm{Re}\left[H_0 X_0 r\; e^{jq} e^{(-st + jw'_c t)}\right]u(t)$$

$$y(t) = H_0 X_0\left[1 + 2\,r\; e^{-st} \times \mathrm{Re}(e^{j(q + w'_c t)})\right]u(t)$$

$$\boxed{y(t) = H_0 X_0\left[1 + 2\,r\; e^{-st} \times \cos(q + w'_c t)\right]u(t)}$$