Filtrage par variable d'état

1 - Introduction :

Le filtrage analogique par variable d'état repose sur l'utilisation d'amplificateurs linéaires intégrés réalisant les opérations élémentaires nécessaires à la réalisation d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

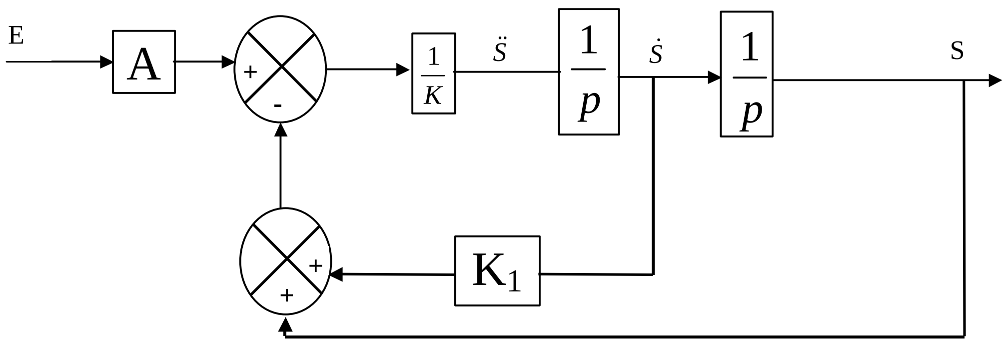
2 - Principe :

L'exemple suivant présente la méthode théorique de construction d'un filtre passe-bas élaboré à l'aide de la méthode des variables d'état.

De la forme $\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{A}{(j\frac{w}{w_c})^2 + 2mj\frac{w}{w_c} + 1}$ donc $\frac{S}{E} = \frac{A}{Kp^2 + K_1 p + 1}$ avec $\begin{cases} K = \frac{1}{w^2{}_C} \\ K_1 = \frac{2m}{w_C} \end{cases}$

$$Kp^2S + K_1 pS + S = AE \Rightarrow K\ddot{S} + K_1\dot{S} + S = AE \Rightarrow \ddot{S} = \frac{1}{K}\left(AE - K_1\dot{S} - S\right)$$

Schéma blocs



Les intégrateurs $\frac{1}{P}$ sont réalisés par une structure active R,C et ALI permettant d'élaborer la fonction $-\frac{1}{RCp}$,
Il convient donc lors de la réalisation de ce type de filtre de prendre en compte d'une part les équations mathématiques, mais aussi les possibilités structurelles et leurs implications directes sur les changements de signes et les modifications d'amplification.

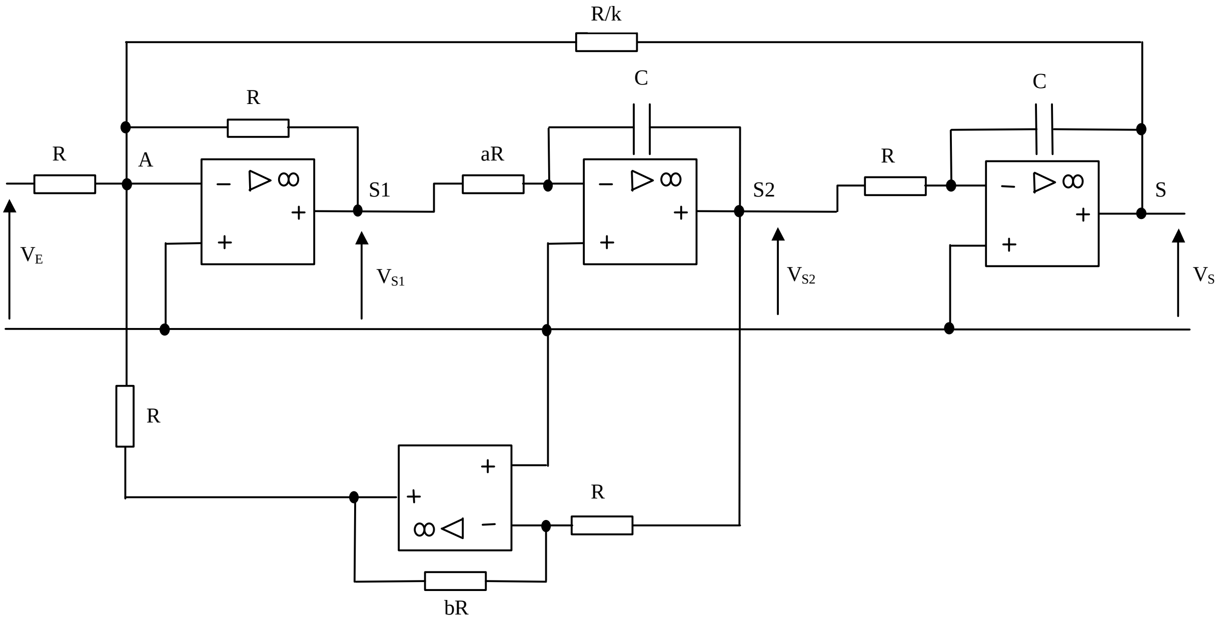
Il est aussi utile de prendre en compte le comportement en fréquence des ALI en fonction des fréquences utiles du montage.

La suite de ce document présente une structure répondant à la réalisation de filtres simples sur le principe des variables d'état.

L. LUBRANO 1998

3 - Structure générale :

Le montage suivant permet de réaliser des équations différentielles exploitables par la suite pour un filtrage :



Dans ce montage, les deux intégrateurs réalisent les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \dfrac{V_{S2}}{R} = -C\dfrac{dV_S}{dt} \\ \dfrac{V_{S1}}{aR} = -C\dfrac{dV_{S2}}{dt} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{cases} V_{S2} = -RC\dfrac{dV_S}{dt} \ (1) \\ V_{S1} = -aRC\dfrac{dV_{S2}}{dt} \ (2) \end{cases}}$$

et la loi des noeuds appliquée au point A permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{V_E}{R} + \frac{kV_S}{R} + \frac{V_{S1}}{R} - \frac{bV_{S2}}{R} = 0 \ (3)}$$

On déduit des équations (1), (2) et (3) :

$$\frac{V_E}{R} + \frac{kV_S}{R} - aC\frac{dV_{S2}}{dt} + bC\frac{dV_S}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{V_E}{R} + \frac{kV_S}{R} + aCRC\frac{d^2V_S}{dt^2} + bC\frac{dV_S}{dt} = 0$$

donc : $aR^2C^2\dfrac{d^2V_S}{dt^2} + bRC\dfrac{dV_S}{dt} + kV_S = -V_E$

On peut effectuer une normalisation de l'axe des temps à $t' = \dfrac{t}{RC}$ ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\boxed{a\frac{d^2V_S}{dt'^2} + b\frac{dV_S}{dt'} + kV_S = -V_E}$$ ***Equation différentielle du second ordre liant l'entrée et la sortie***.

4 - Filtrage par variable d'état :

Les équations précédentes (1), (2) et (3), s'écrivent en régime harmonique :

$$\begin{cases} \underline{V_{S2}} = -jRCw\underline{V_S} \\ \underline{V_{S1}} = -jaRCw\underline{V_{S2}} \\ \underline{V_E} + k\underline{V_S} + \underline{V_{S1}} - b\underline{V_{S2}} = 0 \end{cases}$$

4-1 Filtre Passe-Bas : Sortie en V_S.

$$\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = -\frac{1}{(jw)^2(RC)^2a + jwbRC + k} \text{ de la forme } \underline{T} = \frac{A}{(j\frac{w}{w_c})^2 + 2mj\frac{w}{w_c} + 1} \quad \text{avec} \begin{cases} A = -\frac{1}{k} \\ w_c = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{k}{a}} \\ m = \frac{b}{2\sqrt{ak}} \end{cases}$$

4-2 Filtre Passe-Bande : Sortie en V_{S2}.

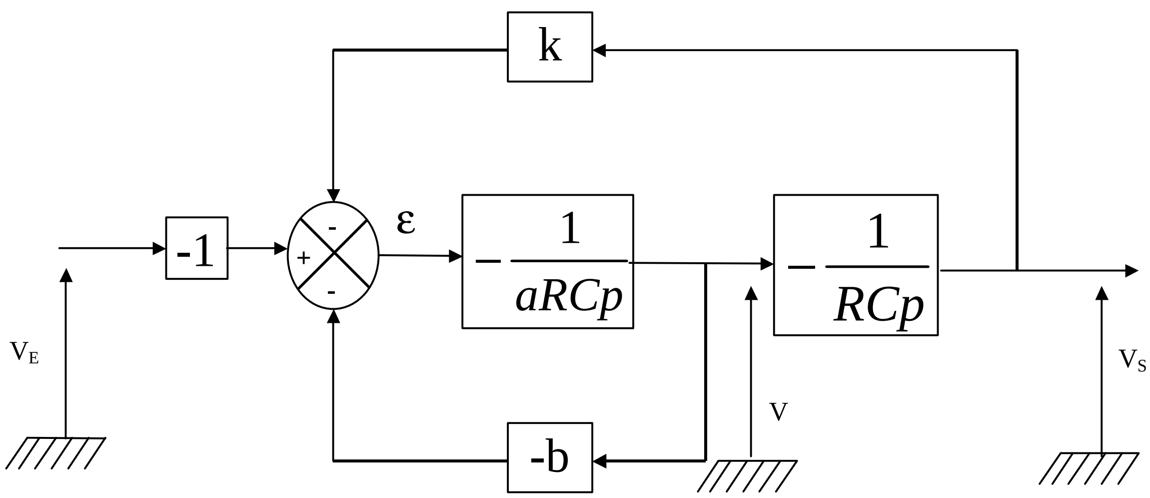
$$\frac{\underline{V_{S2}}}{\underline{V_E}} = \frac{\underline{V_{S2}}}{\underline{V_S}} \times \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \frac{jwRC}{(jw)^2(RC)^2a + jwbRC + k} \text{ de la forme } \underline{T} = A\frac{2mj\frac{w}{w_c}}{(j\frac{w}{w_c})^2 + 2mj\frac{w}{w_c} + 1} \quad \text{avec} \begin{cases} A = \frac{1}{b} \\ w_c = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{k}{a}} \\ m = \frac{b}{2\sqrt{ak}} \end{cases}$$

4-3 Filtre Passe-Haut : Sortie en V_{S1}.

$$\frac{\underline{V_{S1}}}{\underline{V_E}} = \frac{\underline{V_{S1}}}{\underline{V_{S2}}} \times \frac{\underline{V_{S2}}}{\underline{V_E}} = -\frac{(jw)^2(RC)^2a}{(jw)^2(RC)^2a + jwbRC + k} \text{ de la forme } \underline{T} = A\frac{(j\frac{w}{w_c})^2}{(j\frac{w}{w_c})^2 + 2mj\frac{w}{w_c} + 1} \quad \text{avec} \begin{cases} A = -1 \\ w_c = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{k}{a}} \\ m = \frac{b}{2\sqrt{ak}} \end{cases}$$

5 - Représentation sous forme de schéma bloc :

La structure générale du *paragraphe 2* peut se représenter sous forme de schéma bloc comportant deux intégrateurs, des amplificateurs, et un sommateur.



5-1 Filtre Passe-Bande : démonstration

$$\underline{e} = -k\underline{V_S} - \underline{V_E} + b\underline{V} \text{ et } \underline{V} = -\frac{1}{aRCp}\underline{e} \Rightarrow \underline{V} = \frac{1}{aRCp}k\underline{V_S} + \frac{1}{aRCp}\underline{V_E} - \frac{b}{aRCp}\underline{V}$$

$$\text{donc : } \underline{V}\left[1 + \frac{b}{aRCp}\right] = -\frac{k}{a(RC)^2p^2}\underline{V} + \frac{1}{aRCp}\underline{V_E} \Rightarrow \underline{V}\left[1 + \frac{b}{aRCp} + \frac{k}{a(RC)^2p^2}\right] = \frac{1}{aRCp}\underline{V_E}$$

$$\text{d'où : } \frac{\underline{V}}{\underline{V_E}} = \frac{\frac{1}{aRCp}}{\left[\frac{k}{a(RC)^2p^2} + \frac{b}{aRCp} + 1\right]} = \frac{1}{b}\frac{\frac{bRCp}{k}}{\left[1 + \frac{bRCp}{k} + \frac{a(RC)^2p^2}{k}\right]}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \dfrac{1}{b} \\ w_c = \dfrac{1}{RC}\sqrt{\dfrac{k}{a}} \\ m = \dfrac{b}{2\sqrt{ak}} \end{cases}$$

Il est ainsi possible de retrouver les expressions des autres filtres réalisables avec la structure.